Naam:	Geb. datum:	Bladnr.:
Adres:	Studierichting:	Tentamen: Functietheorie
Postcode en Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Datum: 24-02-'95
		Naam docent: Brooksma

OPGAVE 1

a Im f is continu en dus harmonisch als:
$(\mathrm{Im} f)_{xx} + (\mathrm{Im} f)_{yy} = 0$

$(\mathrm{Im} f)_x = 4y^3 + 3ax^2y$ $\quad (\mathrm{Im} f)_{xx} = 6axy$
$(\mathrm{Im} f)_y = 12xy^2 + ax^3$ $\quad (\mathrm{Im} f)_{yy} = 24xy$

4 Dus $(\mathrm{Im} f)_{xx} + (\mathrm{Im} f)_{yy} = 6axy + 24xy = 0 \Leftrightarrow a = -4$

$\mathrm{Im}\, f(x+iy) = 4xy^3 - 4x^3y$

$f = u + iv$ is geheel als de partiële afgeleiden u_x, u_y, v_x en v_y continu zijn en voldoen aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen: $u_x = v_y$ en $u_y = -v_x$

$v_y = 12xy^2 - 4x^3 = u_x$ continu $\Big\} \Rightarrow u = 6x^2y^2 - x^4 + c(y) + c_1$
$v_x = 4y^3 - 12x^2y = -u_y$ continu $\Big\} \Rightarrow u = -(y^4 - 6x^2y^2 + c(x) + c\ )$
$= -y^4 + 6x^2y^2 - c(x) - c_2$

dus $c(y) = -y^4$
$c(x) = x^4$
$-c_2 = c_1$
en $u = 6x^2y^2 - y^4 - x^4 + c_1$ $\quad c_1 \in \mathbb{R}$

$f = 6x^2y^2 - y^4 - x^4 + c_1 + i(4xy^3 - 4x^3y)$ $\quad c_1 \in \mathbb{R}$
Stel $y = 0 \Rightarrow f(x) = -x^4 + c_1$

Hieruit volgt dat $f(z) = -z^4 + c_1$, want f en $-x^4 + c_1$
1 geheel en $f = -x^4 + c_1$ voor $y = 0$

b) $\int_C \frac{g(z)}{z^{n+1}}\,dz = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

g analytisch op de schijf $|z|<1$

Definieer coëfficiënten $a_j = \int_C \frac{g(z)}{z^{j+1}}\,dz$

met C een cirkel $|z| = c$ met $0<c<1$ bv. $\frac{1}{4}$

Dan convergeert de Laurentreeks $g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_j (z)^j$

5 uniform naar de functie $g(z)$ op iedere schijf

die bevat is in $|z| \leq 1$

$a_j = \int_C \frac{g(z)}{z^{j+1}}\,dz = 1$ voor alle $j \in \mathbb{N}$

als $j<0$: $a_j = 0$,

want g analytisch

$$\sum_0^\infty z^n = \frac{1+z^{n+1}}{z-1} = g(z)$$

deze functie is analytisch op $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, want hij is differentieerbaar voor alle z, behalve $z=1$.

OPGAVE 2

ai) $f(z) = z^2(e^{\frac{1}{z}} - z^{-3})$

Singulariteiten:

4 $z^2(e^{\frac{1}{z}} - \frac{1}{z^3}) = z^2 e^{\frac{1}{z}} - \frac{1}{z}$

$z=0$ is singulariteit, als $z \downarrow 0$, dan

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{z}} \to \infty \\ z^2 \to 0 \\ \frac{1}{z} \to \infty \end{cases}$$

Taylorontwikkeling om limiet te bepalen:

$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z^3}$

$z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6z} + \ldots$

$z^2 e^{\frac{1}{z}} - \frac{1}{z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{z}(\frac{1}{6} - 1)$

2 a_{-1} is residu, de coëfficiënt bij $\frac{1}{z} = -\frac{5}{6}$

Laurentontwikkeling $\sum_{-\infty}^{\infty} a_j (z-\alpha)^j$

a_{-1} is residu $\rightarrow (z-\alpha)^{-1} = z^{-1} = \frac{1}{z}$

Naam:	Geb. datum:	Bladnr.:
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Datum: Naam docent:

dus $\text{Residu}_{z=0} = -\frac{5}{6}$

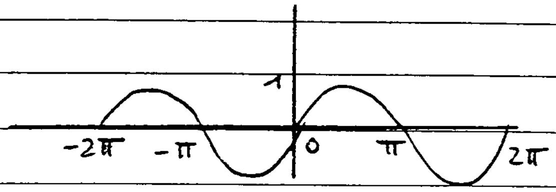
Aard v.d. singulariteit: essentieel: $\lim_{z \downarrow 0} = \infty$
$\lim_{z \uparrow 0} = -\infty$

dus zeker niet ophefbaar
(Ook te zien aan coëff. $a_j \neq 0$ voor $j<0$)

aii) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3} + \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$

Taylorontwikkeling van sin z rond 0
$z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 \ldots\ldots$

$\sin z = -\sin(z-\pi)$



4⁻

Taylorontwikkeling van sin z rond (z−π)
$-(z-\pi) + \frac{1}{3!}(z-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(z-\pi)^5$

$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \cdots - \frac{1}{(z-\pi)} + \frac{(z-\pi)}{3!} - \frac{(z-\pi)^3}{5!}$

?

singulariteiten $z=0$ en $z=\pi$
Res $z=0$ is 0 (coëff bij $\frac{1}{z}$ in Laurentreeks)
Res $z=\pi$ is −1 (coëff bij $\frac{1}{(z-\pi)}$ " ")

De singulariteit 0 is pool v orde 3 = ~~ophefbaar~~
" π " " 2 = ~~ophefbaar~~

③

b) f heeft een k^e orde nulpunt dwz er bestaat een functie g, analytisch rond nul, zodat
$f(z) = z^k g(z)$

f is analytisch op $|z|<3$
dus f is zeker analytisch op $|z| \leq 2$ en is dus ook continu op de rand $|z|=2$

5/ Als f continu is, dan ook $|f|$ continu

$\xRightarrow{\text{max princ 2}}$ $|f(z)|$ neemt zijn maximum aan op de rand
dwz $|f(z)| \leq 1$ als $|z| \leq 2$

Op de rand geldt $|f(z)| \leq 1$ $(|z|=2)$

$$|f(z)| = |z^k g(z)|$$
$$= |z^k| |g(z)|$$
$$= |z|^k |g(z)| \leq 1 \text{ als } |z|=2$$

$$\Rightarrow |g(z)| \leq \frac{1}{|z|^k} = \frac{1}{(2)^k}$$

$|g(z)| \leq \frac{1}{|2|^k}$, vermenigvuldig nu met $|z|^k$

$$|z|^k |g(z)| \leq \left|\frac{z}{2}\right|^k$$

$|z^k g(z)| \leq \left|\frac{z}{2}\right|^k$, dus $|f(z)| \leq \left|\frac{z}{2}\right|^k$
als $|z| \leq 2$

4

Naam:	Geb. datum:	Bladnr.:
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Datum:
		Naam docent:

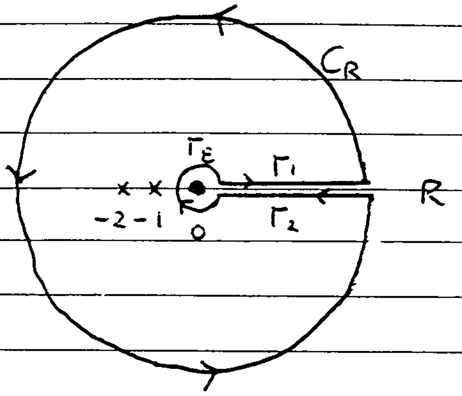
9/

OPGAVE 3

Beschouw de integraal: $\int_C \frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z+1)(z+2)}\,dz$

met $f(z) = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z+1)(z+2)}$

en C in de figuur:



dan geldt:

$$\int_C = \int_{C_R} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_\varepsilon} + \int_{\Gamma_1}$$

Volgens de Residuenstelling:

$$\int_C \frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z+1)(z+2)}\,dz = 2\pi i \cdot \left(\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-2} f(z)\right)$$

- z_{-1} is een enkelvoudige pool, dus:

$$\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) : \lim_{z\to -1} (z+1)\frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z+1)(z+2)} =$$

$$\lim_{z\to -1} \frac{(z+1)\,e^{\frac{1}{3}(\log|z| + i\arg z)}}{(z+1)(z+2)} = e^{\frac{1}{3}\pi i}$$

- z_{-2} is een enkelvoudige pool, dus:

$$\operatorname{Res}_{z=-2} f(z) : \lim_{z\to -2} (z+2)\frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z+1)(z+2)} =$$

$$\lim_{z\to -2} \frac{(z+2)\,e^{\frac{1}{3}(\log|z| + i\arg z)}}{(z+1)(z+2)} = -2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}\pi i}$$

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z+1)(z+2)}\,dz\right| \leq 2\pi R \cdot \max \left|\frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z-1)(z-2)}\right|$$

$$= 2\pi R \cdot R^{1/3}/(R-1)(R-2) \to 0 \text{ als } R \to \infty$$

(5)

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z+1)(z+2)}\,dz\right| \leq 2\pi\varepsilon \cdot \max \left|\frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z+1)(z+2)}\right|$$

$$= 2\pi\varepsilon \cdot \varepsilon^{1/3} / |(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)| \to 0 \text{ als } \varepsilon \to 0$$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z+1)(z+2)}\,dz = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

subst. $\left\{ z^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\log z} = e^{\frac{1}{3}(\log|z| + i\arg z)} = x^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{1}{3} i \underbrace{\arg z}_{=0}} = x^{\frac{1}{3}} \right.$

$$\int_{\Gamma_2} \frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z+1)(z+2)}\,dz = \int_{R}^{\varepsilon} \frac{x^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3} i\pi}}{(x+1)(x+2)}\,dx = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{x^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3}\pi i}}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

subst. $\left\{ z^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3} i \underbrace{\arg z}_{=2\pi}} = x^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3} i\pi} \right.$

We hebben nu dus:

$$\int_C = 2\pi i\left(e^{\frac{1}{3}\pi i} - 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}\pi i}\right) = 2\pi i\, e^{\frac{1}{3}\pi i}\left(1 - 2^{\frac{1}{3}}\right) = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}$$

$$\overset{\varepsilon \downarrow 0}{\underset{R\to\infty}{=}} \left(1 - e^{\frac{2}{3}\pi i}\right) \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

dus $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x+1)(x+2)}\,dx$

$$= \frac{2\pi i\, e^{\frac{1}{3}\pi i}\left(1 - 2^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(1 - e^{2/3\pi i}\right)} = \frac{e^{-\frac{1}{3}\pi i}}{e^{-\frac{1}{3}\pi i}} \left(\frac{2\pi i\, e^{\frac{1}{3}\pi i}\left(1 - 2^{\frac{1}{3}}\right)}{1 - e^{2/3\pi i}}\right)$$

$$= \frac{2\pi i\left(1 - 2^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(e^{-\frac{1}{3}\pi i} - e^{\frac{1}{3}\pi i}\right)} = \frac{-\frac{1}{2i}}{-\frac{1}{2i}} \cdot \frac{2\pi i\left(1 - 2^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(e^{-\frac{1}{3}\pi i} - e^{\frac{1}{3}\pi i}\right)}$$

$$= \frac{\pi\left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)}{\sin\frac{1}{3}\pi} = \frac{\pi\left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)$$

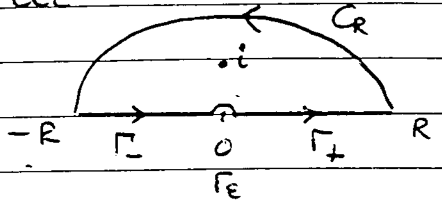
6

Naam: Adres: Postcode en Woonplaats:	Geb. datum: Studierichting: Jaar van eerste inschrijving:	Bladnr.: Tentamen: Datum: Naam docent:

OPGAVE 4

a) Beschouw de integraal $\int_C \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2}\,dz$

met $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2}$ en C:



6/

$$\int_C = \int_{C_R} + \int_{\Gamma_-} + \int_{\Gamma_\varepsilon} + \int_{\Gamma_+}$$

Volgens de Residustelling geldt:

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2}\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=i} f(z)$$

$z=i$ is een tweevoudige pool, dus

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \left[\frac{d}{dz}\,(z-i)^2\,\frac{e^{iz}}{z(z-i)^2}\right]_{z=i}$$
$$= \left[\frac{d}{dz}\,\frac{e^{iz}}{z}\right]_{z=i} = \left[e^{iz}\left(\frac{i}{z} - \frac{1}{z^2}\right)\right]_{z=i} = \frac{2}{e}$$

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2}\,dz\right| \leq \pi \cdot R \cdot \frac{1}{R(R-1)^2} \to 0 \text{ voor } R \to \infty$$

$$\int_{\Gamma_-} = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x(x-i)^2}\,dx$$

$$\int_{\Gamma_+} = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x(x-i)^2}\,dx$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2}\,dz = -i\cdot\pi\cdot\operatorname{Res}_{z=0} f(z)$$

want $z=0$ is enkelvoudige pool

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2}\,dz = i\cdot\pi$$

We hebben nu dus:

$$\int_C = 2\pi i \cdot \frac{2}{e} = \int_{\Gamma_-} + \int_{\Gamma_+} + \int_{\Gamma_\varepsilon}$$

$$= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x(x-i)^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x(x-i)^2}\,dx + i\cdot\pi$$

7

Dus als $\varepsilon \to 0$ en $R \to \infty$:

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x(x-i)^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x(x-i)^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x-i)^2}\,dx = 2\pi i \cdot \frac{2}{e} - i\pi$$

$$= \pi i \left(\frac{4}{e} - 1\right)$$

b) $f(z) = (z+\frac{1}{2})\Gamma(2z)$

3/ $f(z)$ is analytisch in $\mathbb{C}$ behalve in $z=0$ en $z=-\frac{1}{2}$

Uit de Residuenstelling volgt nu:

$$\int_C (z+\tfrac{1}{2})\Gamma(2z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{2}} f(z)\right)$$

$z=0$ enkelvoudige pool:

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} z\cdot(z+\tfrac{1}{2})\Gamma(2z)$$
$$= \lim_{z\to 0} (z+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} \quad \text{want } \Gamma(z) \sim \tfrac{1}{z} \text{ als } z\to 0$$

$z=-\frac{1}{2}$ enkelvoudige pool:

$$\operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{2}} f(z) = \lim_{z\to -\frac{1}{2}} (z+\tfrac{1}{2})(z+\tfrac{1}{2})\Gamma(2z)$$
$$= 0, \quad \text{want } \Gamma(z) \sim \tfrac{-1}{z+1} \text{ als } z \to 1$$

dus $\int_C (z+\frac{1}{2})\Gamma(2z)\,dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi i}{2}$

8